$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

المحاضرة الرابعة

مثال ٤ ص 138

اوجد حل المعادلات التكاملية التالية ①

$$g(x) = \cos 2x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x - 2t)\, g(t)\, dt$$

ثم اوجد حل معادلة المتجانسة المرافقة للمعادلة المعطاة وذلك في حالة $\lambda = -\frac{3}{4}$

$k(x,t) = \sin(x - 2t) = \sin x \cos 2t - \cos x \sin 2t$

$a_1(x) = \sin x \qquad a_2(x) = -\cos x$

$b_1(t) = \cos 2t \qquad b_2(t) = \sin 2t$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum c_i a_i(x)$

$g(x) = \cos 2x + \lambda c_1 \sin x - \lambda c_2 \cos x$ ②

c_1, c_2 مجهولات

$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i \qquad (i = 1, 2)$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} ③$$

$f_i = \int_0^{\pi} b_i(t) f(t)\, dt \qquad \alpha_{ij} = \int_0^{\pi} b_i(t) a_j(t)\, dt$

$f_1 = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \cos 2t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 2t\, dt$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4t)\, dt = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{f_1 = \frac{\pi}{2}}$

$f_2 = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \sin 2t\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 4t\, dt$

$\boxed{f_2 = 0}$

$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \sin t\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin 3t - \sin t)\, dt$

$= -\frac{2}{3}$ $\boxed{\alpha_{11} = -\frac{2}{3}}$

$\alpha_{12} = 0 \qquad \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{22} = -\frac{4}{3}$

بحل هذا النظام في ③ نحصل

$$\left.\begin{aligned} (1 + \tfrac{2}{3}\lambda) c_1 &= \tfrac{\pi}{2} \\ (1 + \tfrac{4}{3}\lambda) c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} ④$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1 + \frac{2}{3}\lambda)(1 + \frac{4}{3}\lambda)$

وهذا نظام خطي

[1] اذا $D(\lambda) \neq 0 \Leftarrow \lambda \neq -\frac{3}{4}$ ، $\lambda \neq -\frac{3}{2}$

فان هذا النظام له حل وحيد والمعادلة ① لها حل

لايجاد هذا الحل نوجد c_1, c_2 في ④

وبحل النظام في ④

$c_1 = \frac{3\pi}{2(3 + 2\lambda)}$

$c_2 = 0$

نعوض في ②

$g(x) = \cos 2x + \frac{3\lambda\pi}{2(3 + 2\lambda)} \sin x$

[2] اذا $D(\lambda) = 0$ اي $\lambda = -\frac{3}{4}$ ، $\lambda = -\frac{3}{2}$

عندما $\lambda = -\frac{3}{4}$ نعوض في ④

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} c_1 = \tfrac{\pi}{2} &\Rightarrow c_1 = \pi \\ 0 &\Rightarrow 0\, c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_1 &= \pi \\ &\forall c_2 \end{aligned}$$

المعادلة ① لها عدد لانهائي من الحلول

وذلك لان $c_1 = \pi$ نعوض في ②

$g(x) = \cos 2x + \frac{3}{4}\pi \sin x + \frac{3}{4} c_2 \cos x$

$\forall c_2$

④ $\lambda = -\frac{3}{2}$ نعوض في ④

$0 = \frac{\pi}{2} \quad \forall C_1$; $0 C_1 = \frac{\pi}{2}$

$- C_2 = 0$; $- C_2 = 0$

ف المعادلة الثانية لها حل ' وهو $0 = \frac{\pi}{2}$

مستحيل لان المعادلة ① لا تملك اي حل

عند $\lambda = -\frac{3}{2}$

• حل معادلة المعادلة المتجانسة عند $\lambda = -\frac{3}{4}$

لها الموازنة عن متساوية مع حل مقبول

المعادلة غير متجانسة

$$\psi(t) = \lambda \int_{\pi}^{?} K(t,x)\, \psi(t)\, dt$$

$$\psi(t) = -\frac{3}{4} \int_{0}^{\pi} \sin(t-2x)\, \psi(t)\, dt \quad ①$$

$\sin(t-2x) = \sin t \cos 2x - \cos t \sin 2x$

$a_1(x) = \cos 2x \qquad a_2(x) = \sin 2x$

$b_1(t) = \sin t \qquad b_2(t) = \cos t$

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{2} C_i\, a_i(x)$$

$$\psi(x) = -\frac{3}{4} C_1 \cos 2x + \frac{3}{4} C_2 \sin 2x \quad ②$$

$$\lambda \sum \alpha_{ki}\, C_k = C_i$$

$$-\frac{3}{4}\alpha_{11} C_1 - \frac{3}{4}\alpha_{21} C_2 = C_1$$
$$-\frac{3}{4}\alpha_{21} C_1 - \frac{3}{4}\alpha_{22} C_2 = C_2 \quad ③$$

نعوض في المعاملات α_{ij}

$\alpha_{11} = -\frac{2}{3} \quad \alpha_{12} = 0 \quad \alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{22} = -\frac{4}{3}$

نعود ③

$$\frac{1}{2} C_1 = C_1$$
$$C_2 = C_2$$
$$\frac{1}{2} C_1 - C_1 = 0$$
$$C_2 - C_2 = 0$$
$$-\frac{1}{2} C_1 = 0 \;\; \Big\} \;\; C_1 = 0$$
$$0\, C_2 = 0 \;\; \Big\} \;\; \forall C_2$$

نعود في ②

$$\psi(x) = \frac{3}{4} C_2 \sin 2x \qquad \forall C_2$$

$$\psi(x) = -\frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin(t-2x)\, \psi(t)\, dt \quad ②$$

$$\psi = \lambda \sum_{i=1}^{2} C_i\, a_i(x)$$

$$\psi = -\frac{3}{4} C_1 \cos 2x + \frac{3}{4} C_2 \sin 2x$$

لـ C_1, C_2

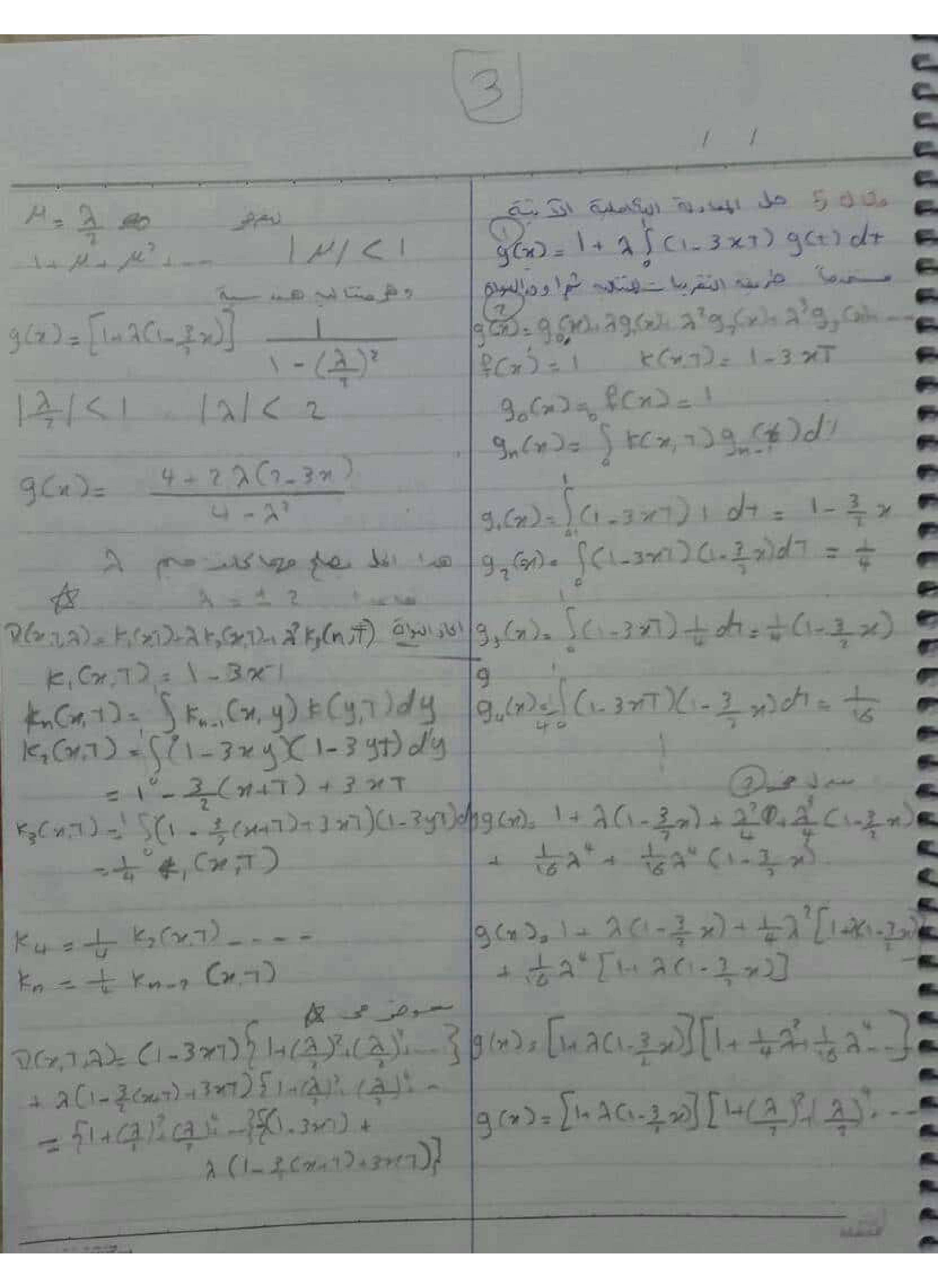
من حل المعادلات المتجانسة في ③

$$\left(1 + \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 = 0$$
$$\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) C_2 = 0$$

لـ $\lambda = \frac{3}{4}$ نعوض

$$\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) C_1 = 0$$
$$\left(1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) C_2 = 0$$
$$\frac{1}{2} C_1 = 0 \;\; \Big\} \;\; C_1 = 0$$
$$0\, C_2 = 0 \;\; \Big\} \;\; \forall C_2$$

نعود في ② نحصل على الحل



3

/ /

مثال 5: حل المعادلة التكاملية الآتية

(1)
$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\, g(t)\, dt$$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية ثم اوجد الحل

(2)
$$g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \lambda^3 g_3(x) + \cdots$$

$f(x) = 1 \qquad k(x,t) = 1 - 3xt$

$g_0(x) = f(x) = 1$

$g_n(x) = \int_0^1 k(x,t)\, g_{n-1}(t)\, dt$

$g_1(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)\, 1\, dt = 1 - \frac{3}{2}x$

$g_2(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)(1 - \frac{3}{2}x)\, dt = \frac{1}{4}$

$g_3(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)\, \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{2}x)$

$g_4(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - 3xt)(1 - \frac{3}{2}x)\, dt = \frac{1}{16}$

سوف نعوض في (2)

$$g(x) = 1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{1}{16}\lambda^5 (1 - \frac{3}{2}x)$$

$$g(x) = 1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{1}{4}\lambda^2 [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)] + \frac{1}{16}\lambda^4 [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)]$$

$$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)][1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 \cdots]$$

$$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)][1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots]$$

نفرض $\mu = \frac{\lambda}{2}$

$1 + \mu + \mu^2 + \cdots \qquad |\mu| < 1$

وهي متتالية هندسية

$$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)] \frac{1}{1 - (\frac{\lambda}{2})^2}$$

$|\frac{\lambda}{2}| < 1 \qquad |\lambda| < 2$

$$g(x) = \frac{4 + 2\lambda(2 - 3x)}{4 - \lambda^2}$$

هنا الحل صحيح لجميع قيم λ ما عدا $\lambda = \pm 2$

☆ ايجاد النواة

$D(x,t,\lambda) = k_1(x,t) + \lambda k_2(x,t) + \lambda^2 k_3(x,t)$

$k_1(x,t) = 1 - 3xt$

$k_n(x,t) = \int k_{n-1}(x,y)\, k(y,t)\, dy$

$k_2(x,t) = \int_0^1 (1 - 3xy)(1 - 3yt)\, dy$

$= 1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt$

$k_3(x,t) = \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)(1 - 3yt)\, dy$

$= \frac{1}{4} k_1(x,t)$

$k_4 = \frac{1}{4} k_2(x,t) \cdots$

$k_n = \frac{1}{4} k_{n-2}(x,t)$

سوف نعوض في ☆

$$D(x,t,\lambda) = (1 - 3xt)\{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots\}$$
$$+ \lambda(1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)\{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots\}$$
$$= \{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots\}\{(1 - 3xt) + \lambda(1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)\}$$

$\alpha_{12} = -1 \quad \alpha_{21} = \frac{1}{3}a \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{2}$

سـ في ③ نعوض

$$\left.\begin{aligned}(1-\tfrac{1}{2}\lambda a)c_1 + \lambda c_2 &= f_1\\ -\tfrac{1}{3}a\lambda c_1 + (1+\tfrac{1}{2}\lambda)c_2 &= f_2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}\lambda a & \lambda \\ -\frac{1}{3}a\lambda & 1+\frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}a\lambda^2 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}a)\lambda + 1$$

حتى تكون المعادلة لها حل وحيد يجب ان تكون $D(\lambda) \neq 0$ اي ان $D(\lambda) \neq 0$
موجب بحيث تكون المعادلة ليس لها جذور حقيقية

$$\Delta = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{12}a < 0$$

$$a^2 - \frac{10}{3}a + 1 < 0$$

$$a^2 - \frac{10}{3}a + \left(\frac{10}{6}\right)^2 - \left(\frac{10}{6}\right)^2 + 1 < 0$$

$$a^2 - \frac{10}{3}a + \left(\frac{5}{3}\right)^2 < \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1$$

$$\left(a - \frac{5}{3}\right)^2 < \frac{16}{9}$$

$$-\frac{4}{3} < a - \frac{5}{3} < \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{3}+$$

$$\frac{1}{3} < a < 3$$

$$= \frac{(1+\lambda) - \frac{3}{2}(x+T)\lambda - 3(1-\lambda)xT}{1 - \frac{1}{4}\lambda^2}$$

$|\lambda| < 2$ ، حيث ان المطلوب

مثال 7 ص 147

اوجد قيم الوسيط a التي من اجلها تكون المعادلة التكاملية

$$g(x) = \lambda\int_0^1 (ax - T)\,g(T)\,dT + f(x) \quad (1)$$

لها حل وحيد على الـ $f(x) \in C(0,1)$

$k(x,T) = ax - T$

$a_1(x) = ax \qquad a_2(x) = -1$

$b_1(T) = 1 \qquad b_2(T) = T$

$$g(x) = f(x) + \lambda\sum^{2} c_i a_i(x)$$

$$g(x) = f(x) + \lambda c_1 ax - \lambda c_2 \quad (2)$$

c_1, c_2 مجهولات

$$f_i + \lambda\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}c_j = c_i \qquad i = 1,2$$

$$\left.\begin{aligned}f_1 + \lambda\alpha_{11}c_1 + \lambda\alpha_{12}c_2 &= c_1\\ f_2 + \lambda\alpha_{21}c_1 + \lambda\alpha_{22}c_2 &= c_2\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$f_i = \int_0^1 b_i(T)f(T)\,dT$$

$$\alpha_{ij} = \int b_i(T)\,a_j(T)\,dT$$

$$f_1 = \int_0^1 f(T)\,dT \qquad f_2 = \int_0^1 T f(T)\,dT$$

$$\alpha_{11} = \int_0^1 at\,dT = \frac{1}{2}a \qquad \boxed{\alpha_{11} = \frac{1}{2}a}$$

مثال 8

اوجد القيم الخاصة والتوابع الخاصة للمعادلة التكاملية

$$g(x)=\lambda\int_0^1 k(x,t)\,g(t)\,dt \quad (1)$$

علماً:-

$$k(x,t)=\begin{cases} x(1-t) & x\le t \quad 0\le x\le 1 \\ t(1-x) & x>t \quad 0\le t\le 1 \end{cases} \quad (2)$$

نعوض المعادلة (1) بالمعادلة (2) نجد

$$g(x)=\lambda\int_0^x t(1-x)\,g(t)\,dt+\lambda\int_x^1 x(1-t)\,g(t)\,dt \quad (3)$$

نشتق طرفي المعادلة

$$g'(x)=-\lambda\int_0^x t\,g(t)\,dt+\lambda x(1-x)\,g(x)+\lambda\int_x^1 (1-t)\,g(t)\,dt-\lambda x(1-x)\,g(x)$$

$$g''(x)=-\lambda x\,g(x)-\lambda(1-x)\,g(x)=-\lambda g(x)$$

$$g''(x)+\lambda g(x)=0 \quad (4)$$

وهي معادلة من المرتبة الثانية

$$\rho^2+\lambda=0 \Rightarrow \rho^2=-\lambda=\lambda i^2$$

$$\rho=\pm i\sqrt{\lambda}$$

الحل العام للمعادلة هو

$$g_n(x)=A\cos\sqrt{\lambda_n}\,x+B\sin\sqrt{\lambda_n}\,x \quad (5)$$

نوجد A,B

إيجاد الشروط الحدية للمعادلة التكاملية

من (3) عند $x=0$ نعوض في (3)

$$g(0)=0$$

وعند $x=1$

$$g(1)=0$$

$$g(0)=g(1)=0 \quad (6)$$

بتطبيق الشرط (6) على (5) نجد

$$g(0)=0 \Rightarrow A=0 \quad (P)$$

$$g(1)=0 \Rightarrow$$

$$A\cos\sqrt{\lambda}+B\sin\sqrt{\lambda}=0$$

نعوض (P) في

$$B\sin\sqrt{\lambda}=0 \qquad B\neq 0$$

لأنه إذا كانت $B=0$ فإن $g(x)=0$ وهذا مرفوض بالتالي

$$\sin\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}=n\pi \qquad n=1,2,\dots$$

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi \qquad \lambda_n=(n\pi)^2$$ أو

لايجاد التوابع الخاصة نعوض في (5)

$$\sqrt{\lambda_n}=n\pi$$

$$A=0 \qquad B=1$$

$$g_n(x)=\sin n\pi x$$

$$n=1,2,\dots$$